

Préparer ma rentrée mathématiques en 1^{ère} Générale sans Spécialité Mathématiques

LYCÉE ROBERT DOISNEAU
À CORBEIL-ESSONNES

1^{er} Juillet 2022 - 30 Août 2022

I. Calcul

1) Fraction

Cours :

- Somme ou soustraction :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

✎ Les fractions doivent avoir le même dénominateur

- Produit :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

✎ On multiplie numérateur et dénominateur entre eux.

- Quotient :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

✎ Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemple :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{2} + \frac{4}{7} &= \frac{1 \times 7}{2 \times 7} + \frac{4 \times 2}{7 \times 2} = \frac{7+8}{14} = \frac{15}{14} \\ \frac{3}{4} - \frac{2}{5} &= \frac{3 \times 5}{4 \times 5} - \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20} \\ \bullet \quad \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} &= \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{4}{5} \\ \bullet \quad \frac{3}{8} \div \frac{7}{2} &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2 \times 7} = \frac{3}{28} \end{aligned}$$

Exercice 1 : Calculer sans calculatrice et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \frac{11}{9} + \frac{10}{9} & \text{d. } \frac{4}{3} + \frac{9}{8} & \text{g. } \frac{8}{3} \times \frac{7}{16} & \text{j. } \frac{2}{7} + \frac{8}{3} \\ \text{b. } \frac{15}{17} - \frac{6}{17} & \text{e. } \frac{7}{3} - \frac{5}{4} & \text{h. } \frac{1}{8} \times \frac{2}{7} & \text{k. } \frac{\frac{4}{7}}{\frac{7}{16}} \\ \text{c. } \frac{5}{28} - \frac{12}{28} & \text{f. } \frac{8}{5} - \frac{1}{9} & \text{i. } \frac{7}{6} + \frac{3}{8} & \text{l. } \frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{5}} \end{array}$$

Exercice 2 : Comparer sans calculatrice

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \frac{2}{5} \text{ et } \frac{4}{5} & \text{b. } -\frac{8}{7} \text{ et } -\frac{9}{7} & \text{c. } \frac{9}{2} \text{ et } \frac{6}{5} & \text{d. } \frac{4}{7} \text{ et } \frac{5}{8} \\ \text{e. } -\frac{9}{2} \text{ et } -\frac{2}{3} & \text{f. } -\frac{3}{7} \text{ et } -\frac{7}{9} \end{array}$$

Exercice 3 : Ecrire sous la forme d'une seule fraction

$$\begin{array}{llll} \text{a. } 4 + \frac{3}{x+2} & \text{b. } \frac{2x}{x+1} - 5 & \text{c. } \frac{4}{x+1} + \frac{1}{x+2} & \text{d. } \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2x+1} \end{array}$$

2) Puissance

Cours : Soient n et $p \in \mathbb{Z}$ et a et $b \in \mathbb{R}$:

$$\bullet \quad a^n \times b^n = (ab)^n \quad \bullet \quad a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \bullet \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad \bullet \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad \bullet \quad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

Exemple : Décomposer en produit de facteurs premiers

$$1. \quad \frac{5^4 \times 5^3}{5^{-2}} = 5^{4+3-(-2)} = 5^9$$

$$2. \frac{4^2}{4^5} = 4^{2-5} = 4^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2 \times (-3)} = 2^{-6}$$

$$3. (10^2)^3 \times 5 = 10^{2 \times 3} \times 5 = (2 \times 5)^6 \times 5 = 2^6 \times 5^6 \times 5^1 = 2^6 \times 5^7$$

Exercice 4 : Décomposer en produit de facteurs premiers :

a. 88

f. 125^7

k. $\frac{7^2}{63}$

n. $\frac{36^5}{8^3 \times 27^4}$

b. 94

g. 48×54

c. 175

h. $75^4 \times 27^8$

l. $\frac{75^8}{15^4}$

o. $8 \times (7 \times 5)^5 \times \frac{5^2 \times 7^2}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2$

d. 64^5

i. $30^2 \times 12^3 \times 60^4$

e. 27^4

j. $\frac{42}{56}$

m. $\frac{12^5}{3^4 \times 2^{11}}$

p. $9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{5 \times 2^2}{(3^2 \times 2)^4}$

3) Racine Carrée

Cours : Soit a et b deux réels positifs

$$\bullet \sqrt{a^2} = a \quad \bullet \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \bullet \text{Si } b \neq 0, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple : 1. Écrire $\frac{33}{\sqrt{11}}$ sans racine carrée au dénominateur et en simplifiant la fraction :

$$\frac{33}{\sqrt{11}} = \frac{33 \times \sqrt{11}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{33 \times \sqrt{11}}{11} = \frac{3 \times 11 \times \sqrt{11}}{11} = 3\sqrt{11}$$

2. Écrire $\sqrt{150}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et b est l'entier le plus petit possible :

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \times 6} = \sqrt{25} \times \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

3. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\sqrt{63}$

$$49 < 63 < 64 \quad \text{donc} \quad \sqrt{49} < \sqrt{63} < \sqrt{64} \quad \text{donc} \quad 7 < \sqrt{63} < 8$$

4. Donner une valeur exacte de : $\sqrt{18} - \sqrt{36}$

$$\sqrt{18} - \sqrt{50} = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

5. Écrire sans racine carrée au dénominateur $\frac{5}{1 - \sqrt{2}}$

Pour cela on multiplie en haut et en bas par le « conjugué » de $1 - \sqrt{2}$ qui est $1 + \sqrt{2}$

$$\frac{5}{1 - \sqrt{2}} = \frac{5 \times (1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2}) \times (1 + \sqrt{2})} = \frac{5 \times (1 + \sqrt{2})}{1^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{5 \times (1 + \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{5 \times (1 + \sqrt{2})}{-1} = -5(1 + \sqrt{2})$$

Exercice 5 :

1. Écrire les valeurs suivantes sans racine carrée au dénominateur et en simplifiant les fractions :

a. $\frac{121}{\sqrt{11}}$

b. $\frac{70}{\sqrt{5}}$

c. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

d. $\frac{3}{\sqrt{15}}$

e. $\frac{2}{\sqrt{6}}$

2. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et b est l'entier le plus petit possible

a. $\sqrt{27}$

b. $\sqrt{72}$

c. $\sqrt{180}$

d. $\sqrt{108}$

e. $\sqrt{50}$

f. $\sqrt{32}$

Exercice 6 : Donner un encadrement par deux entiers consécutifs des valeurs suivantes

- a. $\sqrt{21}$ b. $\sqrt{102}$ c. $\sqrt{40}$ d. $\sqrt{13}$ e. $\sqrt{61}$ f. $\sqrt{99}$

Exercice 7 : Donner une valeur exacte de :

- a. $2\sqrt{27} - \sqrt{12}$ b. $\sqrt{5} + \sqrt{20}$ c. $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ d. $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ e. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

Exercice 8 : 1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{3} + 2} = 2 - \sqrt{3}$

2. Ecrire sans racine carrée au dénominateur

- a. $\frac{2}{3 + \sqrt{7}}$ b. $\frac{2}{4 - \sqrt{13}}$ c. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$

4) Image, antécédent, point sur courbe

Cours :  Une fonction est un processus qui, à chaque valeur du nombre x , associe un unique nombre y , noté $f(x)$, appelé l'image de x par f . On écrit $f : x \mapsto f(x)$.

 On dit que x est un antécédent de y par f lorsque $y = f(x)$.

 La représentation graphique de f est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.

Exemple : Soit $f(x) = -4x + 7$

Par le calculer déterminer

1. l'image de 3 par la fonction f :

★ l'image de 3 est $f(3)$ qu'on calcule en remplaçant x par 3 dans l'expression de f :

$$f(3) = -4 \times 3 + 7 = -12 + 7 = -5$$

Donc $f(3) = -5$ ainsi l'image de 3 est -5

2. le(s) antécédent(s) de -1 par la fonction f :

★ on cherche le(s) valeur(s) de x (antécédent) telle(s) que

$$f(x) = -1$$

$$\begin{array}{rclcl} \overbrace{-7} & -4x + 7 & = & -1 & \overbrace{-7} \\ \hline & -4x & = & -8 & \overbrace{-7} \\ \div(-4) & & & & \div(-4) \\ \hline & x & = & -2 & \overbrace{-7} \\ & & & & \div(-4) \\ & & & & \hline & x & = & 2 & \end{array}$$

Ainsi 2 est l'antécédent de -1 par la fonction f .

Il n'y en a qu'un car on a trouvé une seule solution à l'équation. On a $f(2) = -1$

3. Le point $A(-2; 1)$ appartient-il à la courbe de f ?

★ On doit vérifier que l'ordonnée de A : 1 est bien l'image de son abscisse -2

$f(-2) = -4 \times (-2) + 7 = 8 + 7 = 15 \neq 1$ donc A n'est pas sur la courbe.

Exercice 9 : On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -5x + 2$ et $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

1. Calculer l'image de 3 par la fonction h .
2. Calculer si il existe le ou les antécédents de -8 par la fonction h .
3. Le point $E(-1; -3)$ appartient-il à $\mathcal{C}_h$? Justifier.
4. Le point G appartient à $\mathcal{C}_h$ et son ordonnée est 1. Quelle est son abscisse ? Justifier.
5. En quel point la courbe $\mathcal{C}_h$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? Justifier.

Exercice 10 : On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x + 3$ et $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

1. Calculer l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction h .
2. Calculer si il existe le ou les antécédents de 2 par la fonction h .
3. Le point $E(-1; -4)$ appartient-il à $\mathcal{C}_h$? Justifier.
4. Le point G appartient à $\mathcal{C}_h$ et son ordonnée est 7. Quelle est son abscisse ? Justifier.
5. En quel point la courbe $\mathcal{C}_h$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? Justifier.

Exercice 11 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Calculer l'image de 6 par f .
3. Calculer le ou les antécédent(s) s'ils existent de 1 par f .
4. Le point $A(22; 5)$ appartient-il à la courbe $\mathcal{C}_f$? Justifier votre réponse.

Exercice 12 : On considère la fonction carrée $f(x) = x^2 - 6$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.
 - (a) si $x = 3$ alors $f(x) = 6$.
 - (b) si $x = -1$ alors $f(x) = 1$.
 - (c) si $f(x) = 16$ alors $x = 4$.
 - (d) Le point $A(-2; -4)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.
2. Calculer l'image de $\sqrt{5}$ par la fonction f .
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) si il(s) existe(nt) de π par la fonction f .

Exercice 13 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Calculer l'image de -2 par f .
3. Calculer, si il(s) existe(nt), le (ou les) antécédent(s) de 5 par f .
4. Le point $E(-1 ; 5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifier.
5. Le point G d'ordonnée -1 appartient à $\mathcal{C}_f$. Quelle est son abscisse ? Justifier.
6. En quel point la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées ? Justifier.

II. Développer, Factoriser, Identité remarquable

Cours :

- ✎ Développer une expression algébrique c'est transformer un produit en une somme ou une différence
- ✎ Factoriser une expression algébrique c'est transformer une somme ou une différence en un produit

- Simple distributivité ou facteur commun :

$$k(a+b) \xrightleftharpoons[\text{Factoriser}]{\text{Développer}} k \times a + k \times b$$

- Double distributivité : $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

- Identité remarquable :

$$\begin{aligned} (a-b)(a+b) &\xrightleftharpoons{\text{Développer}} a^2 - b^2 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &\xrightleftharpoons[\text{Factoriser}]{=} a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

1) Développer

Exemple :

- ★ Simple distributivité : $2(3x-5) = 2 \times 3x - 2 \times 5 = 6x - 10$
- ★ Double distributivité : $(3+x)(-x+7) = 3 \times (-x) + 3 \times 7 + x \times (-x) + x \times 7 = -3x + 21 - x^2 + 7x = -x^2 + 4x + 21$
- ★ Identité remarquable : $(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$
 $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
 $(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = 4x^2 - 28x + 49$

Exercice 14 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide de la distributivité.

- | | | |
|------------------------|---------------------------|---|
| a. $2 \times (a+4)$ | e. $(-3x+8) \times (-7)$ | i. $(2x^2-5x+6) \times (-4x)$ |
| b. $-4 \times (6-x)$ | f. $5 \times (5x^2-3x+4)$ | j. $12 \times \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}\right)$ |
| c. $(11x-7) \times 5$ | g. $a \times (20-2b+a)$ | |
| d. $10 \times (5a-3b)$ | h. $(71x-41) \times x$ | |

Exercice 15 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide de la double distributivité.

- | | | |
|---------------------|--|--|
| a. $(2x+1)(3x-4)$ | d. $(a-b)(a+b)$ | g. $\frac{1}{3}(39x-11)(5x+3)$ |
| b. $(x^2+3)(1-3x)$ | e. $(5x-y)(3y+x)$ | |
| c. $(3a+2b)(-a-5b)$ | f. $(8x+24)\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)$ | h. $\left(\frac{2x}{7}+\frac{1}{5}\right)(14-35x)$ |

Exercice 16 : Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables.

- | | | |
|-----------------------|---|---------------------------------------|
| a. $(a + 5)^2$ | e. $(8x - 6)^2$ | i. $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^2$ |
| b. $(9 - b)^2$ | f. $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ | |
| c. $(x + 7)^2$ | g. $(11 + 3x)^2$ | j. $\left(\frac{5x}{12} + 6\right)^2$ |
| d. $(10 - x)(10 + x)$ | h. $(\sqrt{3} + \sqrt{27})^2$ | |

2) Factoriser

Exemple :

★ Facteur commun : $3x + 18 = 3 \times x + 3 \times 6 = 3(x + 6)$

★ Identité remarquable :

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = (x + 2)^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = (x - 6)^2$$

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x + 2)^2$$

Exercice 17 : Factoriser et réduire les expressions suivantes.

- | | | |
|------------------------|----------------------------------|---|
| a. $3a - 6b + 12$ | d. $7x - 49x^2$ | f. $\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}$ |
| b. $5x^2 + 3x$ | | g. $(x - 2)(3a - b) + (x - 2)(7a + 2b - 3)$ |
| c. $36a^2 - 24b + 12c$ | e. $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ | h. $(7x - 4)(10x + 1) - (-3x + 7)(7x - 4)$ |

Exercice 18 : Factoriser et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables.

- | | | |
|----------------------|------------------------------|---------------------------|
| a. $16a^2 - 9b^2$ | e. $144x^2 - 49y^2$ | h. $121x^2 + 220x + 100$ |
| b. $4x^2 - 12x + 9$ | f. $\frac{9}{4}x^2 - 3x + 1$ | i. $144 - 16x^2$ |
| c. $25x^2 - 20x + 4$ | | j. $1 - \frac{25}{36}x^2$ |
| d. $9x^2 + 12x + 4$ | g. $9x^2 + 18x + 9$ | |

3) Calcul de $f(x + h)$

Exemple : Soit $f(x) = x^2 - 1$. Calculer $f(x + h)$:

$$f(x + h) = (x + h)^2 - 1 = x^2 - 2xh + h^2 - 1$$

Exercice 19 : Soient x et h deux nombres réels, pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f(x + h)$ sous forme développée.

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------------|
| a. $f(x) = 5x - 3$ | c. $f(x) = x^2$ | e. $f(x) = (x + 2)^2$ |
| b. $f(x) = -10x + 6$ | d. $f(x) = -2x^2 + 1$ | f. $f(x) = x^2 + x + 1$ |

Exercice 20 : Soient x et h deux nombres réels, pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f(x + h) - f(x)$ sous forme développée.

- | | | | |
|--------------------|------------------------|--|---------------------------|
| a. $f(x) = 9x + 1$ | b. $f(x) = (2x - 4)^2$ | c. $f(x) = \frac{1}{x}$ (où $x \neq 0$) | d. $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ |
|--------------------|------------------------|--|---------------------------|

III. Taux d'évolution : augmentation et diminution

Cours :

- ✎ Faire évoluer une quantité d'un taux t , correspond à **multiplier** cette valeur par son coefficient multiplicateur noté CM

$$CM = 1 + t$$

- ✎ Une grandeur évolue d'une valeur initiale ν_0 vers une valeur finale ν_1 avec pour coefficient multiplicateur CM , alors :

$$\nu_1 = \nu_0 \times CM$$

Exemple :

- Lors d'une diminution de 10% le taux vaut $t = \frac{-10}{100} = -0,10$ donc le coefficient multiplicateur est $CM = 1 + t = 1 - 0,10 = 0,9$
- Lors d'une augmentation de 3% le taux vaut $t = \frac{3}{100} = 0,03$ donc le coefficient multiplicateur est $CM = 1 + t = 1 + 0,03 = 1,03$
- Le taux correspond à un $CM = 1,45$ est $t = CM - 1 = 0,45$ soit une évolution de 45% (augmentation)
- Le taux correspond à un $CM = 0,82$ est $t = CM - 1 = -0,18$ soit une évolution de -18% (diminution)
- Un article à 60€ diminue de 5% cela revient à multiplier par $CM = 1 - 0,05 = 0,95$.
Le prix après réduction est donc de $60 \times 0,95 = 57€$.
L'article subit une deuxième réduction de 5% après les deux réductions il vaut alors :
 $60 \times 0,95 \times 0,95 = 60 \times 0,95^2 = 54,15€$.

Exercice 21 : Donner le coefficient multiplicateur correspondant à ces évolutions .

- | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------|
| a. Augmentation de 2% | c. Diminution de 75% | e. Diminution de 5% |
| b. Augmentation de 67% | d. Augmentation de 33% | f. Diminution de 43% |

Exercice 22 : Donner le taux puis le pourcentage d'évolution correspond au CM suivant :

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|-------------|
| a. $CM = 1,62$ | c. $CM = 0,40$ | e. $CM = 1,59$ | g. $CM = 3$ |
| b. $CM = 1,8$ | d. $CM = 0,27$ | f. $CM = 0,2$ | |

Exercice 23 :

- Un téléviseur coûte 450€. Son prix augmente de 10%. Calculer la valeur finale.
- Un pull coûte 30 €. Lors des soldes il y a une réduction de 30% dessus. Quel est le coefficient multiplicateur ? Calculer la valeur finale à partir du CM .
- Diminuer un prix de 12%, revient à multiplier ce prix par ?
- Augmenter un prix de 37% revient à multiplier par ?

Exercice 24 : Adnan fabrique des portes-clés. En janvier, il fabrique 300 porte-clés et les stocke. Il décide d'augmenter sa production de 12% tous les mois.

- Quelle sera sa production de porte-clés en février ?
- Quelle sera sa production de porte-clés en mars ?
- Déterminer à partir de quand la production dépassera 700 portes-clés. Préciser à l'aide de la calculatrice.

IV. Lecture graphique

Exemple : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.

- L'image de -4 par f est 3 on a $f(-4) = 3$
- 1 a deux antécédents -2 et $1,5$ car :
 $f(-2) = 1$ et $f(1,5) = 1$
- Le point $(0; -1)$ appartient à la courbe représentative de f car $f(0) = -1$.
- Le point $(2; 3)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f car $f(2) = 1,5 \neq 3$.
- Son tableau de variations est

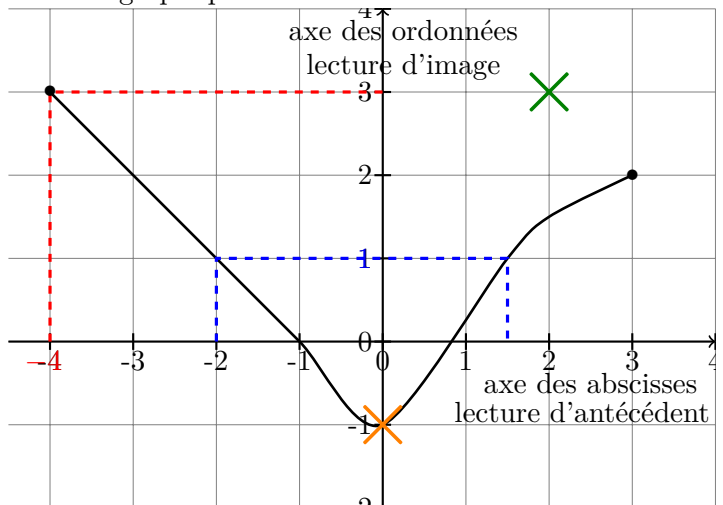
x	-4	0	3
Variations de f	3	-1	2

} Abscisses où l'on change de variation
 } Ordonnées où l'on change de variation

- Son tableau de signe est

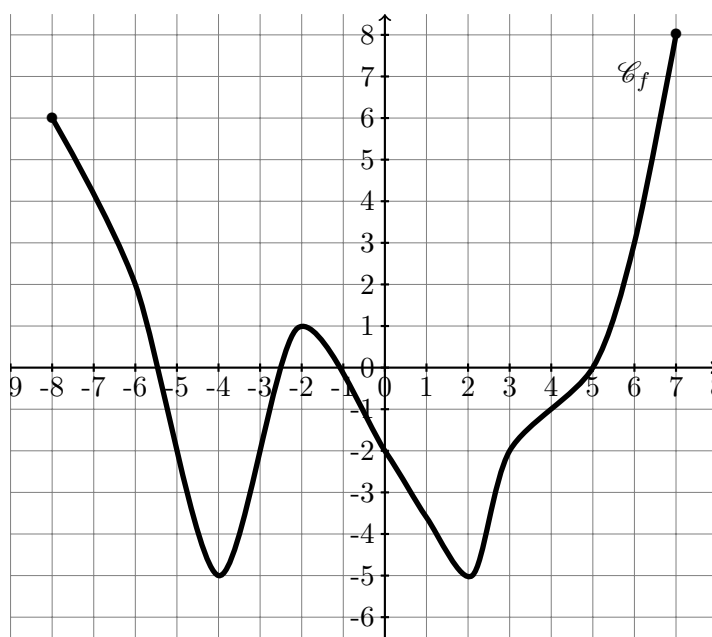
x	-4	-1	1	3	
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

} Abscisses où l'on change de signe
 } Courbe au dessus (+) ou en dessous (-) de l'axe des abscisses



1) Variations de fonction, lecture d'image, d'antécédent, point sur courbe et signe

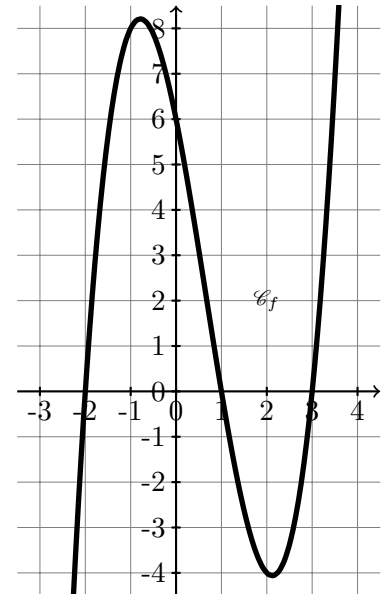
Exercice 25 : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



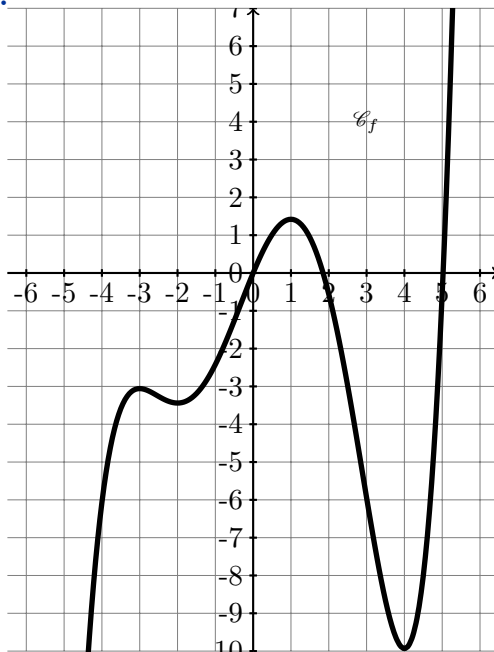
- Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Déterminer graphiquement l'image des nombres suivants par la fonction f .
 a. 6 c. -8 e. -2 g. 3
 b. -6 d. -4 f. 0
- Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) des nombres suivants
 a. -2 b. 0 c. 8 d. -5
- A $(0; -2)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?
- B $(2; -6)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?
- Dresser le tableau de variation de f

Exercice 26 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.



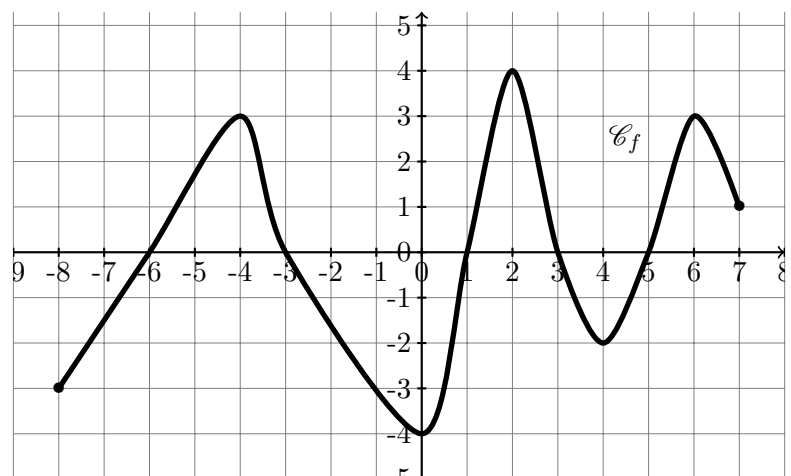
1. Déterminer graphiquement l'image de -2 par la fonction f .
2. Déterminer graphiquement l'image de 2 par la fonction f .
3. Donner un nombre ayant exactement 2 antécédents par la fonction f .
4. Graphiquement dresser le tableau de signe de la fonction f .

Exercice 27 :


On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Déterminer graphiquement l'image de 4 par f .
2. Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 28 : On considère la fonction f dont sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer graphiquement l'image des nombres suivants par la fonction f .
a. -8 b. -4 c. 0 d. 2
3. Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) des nombres suivants
a. 4 b. 1 c. -3

4. Les points suivants appartiennent-ils à C_f ?
a. A(-4;-5) b. B(-3;1) c. C(1;5) d. D(3;-2) e. E(1;-2) f. F(7,8)
5. Dresser le tableau de signe de la fonction f .
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

2) Affine : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Cours :  f est une **fonction affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = mx + p$$

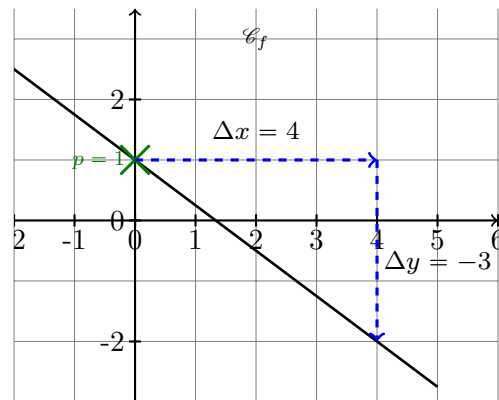
 m est appelé coefficient directeur. Pour tout $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B) \in \mathcal{C}_f$ alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

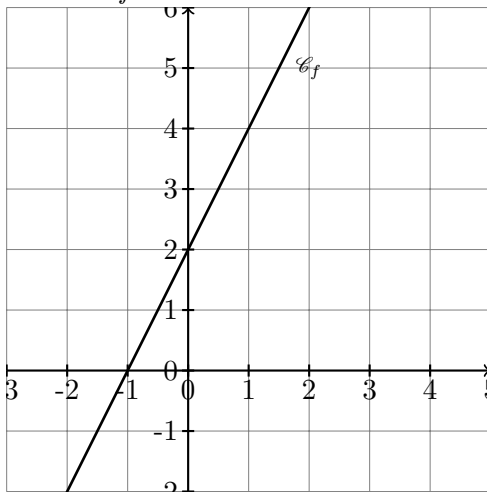
 p est appelé l'ordonnée à l'origine. En effet le point $P \in \mathcal{C}_f$ d'abscisse $x = 0$ a pour ordonnée $f(0) = m \times 0 + p = p$. Donc $P(0; p)$

Exemple : Donner l'expression algébrique de la fonction f dont sa courbe est donnée ci-contre.

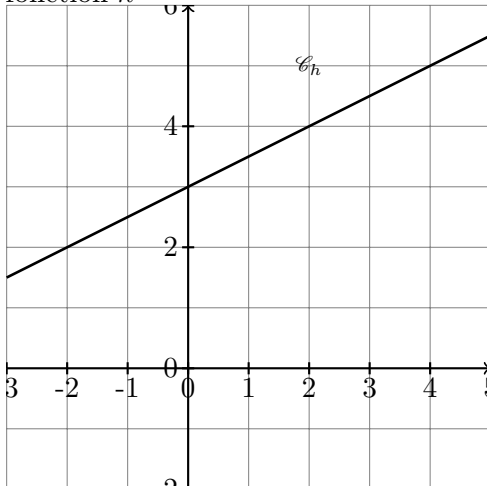
- $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4}$
- $p = 1$
- Ainsi $f(x) = \frac{-3}{4}x + 1$



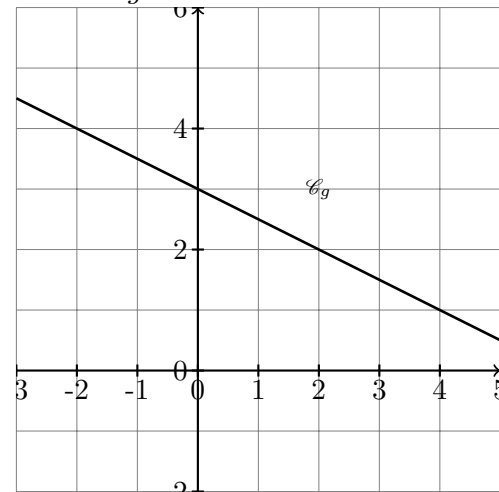
Exercice 29 : Donner l'expression algébrique de la fonction f



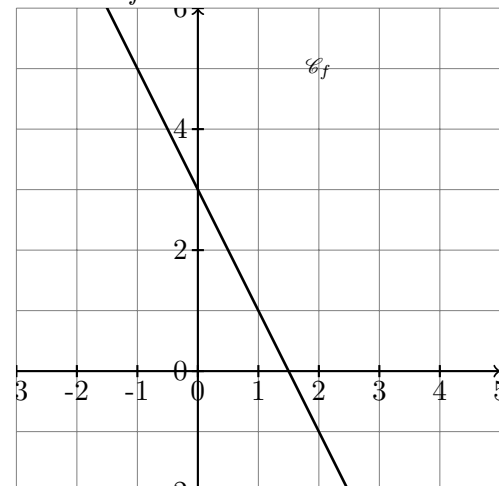
Exercice 31 : Donner l'expression algébrique de la fonction h



Exercice 30 : Donner l'expression algébrique de la fonction g



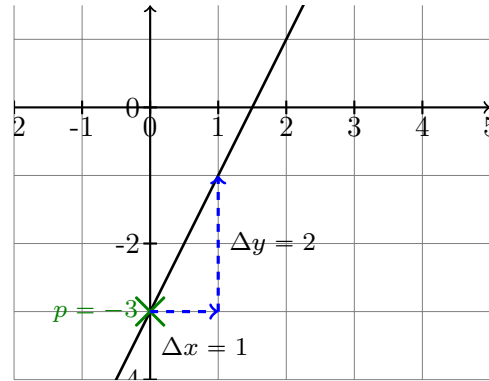
Exercice 32 : Donner l'expression algébrique de la fonction f



Exemple :

 Tracer la courbe de la fonction $f(x) = 2x - 3$

- $m = 2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- $p = -3$


Exercice 33 : Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \frac{1}{6}x - 2$

b. $g : x \mapsto 2x + 4$

c. $h : x \mapsto -\frac{1}{2}x - 1$

V. Etude de signe
Cours : Résolution d'inéquation :

- ✎ Lorsqu'on additionne ou qu'on soustrait on ne change pas le sens de l'inégalité
- ✎ Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre **POSITIF** on **NE** change **PAS** le sens de l'inégalité.
- ⚠ Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre **NEGATIF** on **CHANGE** le sens de l'inégalité.

Exemple : 1. Dresser le tableau de signe de $f(x) = -2x + 7$:

 On cherche les valeurs de x telles que $f(x) > 0$:

 On résume sous forme de tableau de signe :
(cohérent car $m = -2 < 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ -2x + 7 &> 0 \\ -2x &> -7 && \text{on divise par } -2 < 0 \\ x &< \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	+	0	-

 2. Etudier le signe de $f(x) = (-x + 5)(3x - 4)$

 On résume sous forme de tableau de signe : $\frac{4}{3} < 5$

On résout :

On résout :

$$\begin{aligned} -x + 5 &> 0 && 3x - 4 > 0 \\ -x &> -5 && 3x > 4 \\ x &< \frac{-5}{-1} = 5 && x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	5	$+\infty$	
Signe de $-x + 5$	+	+	0	-	
Signe de $3x - 4$	+	0	-	-	
Signe du produit $f(x)$	+	0	-	0	+

3. Etudier le signe de $g(x) = \frac{-x+5}{3x-4}$

On va devoir étudier le signe de $-x+5$ puis de $3x-4$. En utilisant ce qu'on a fait avant.

 ATTENTION - le dénominateur ne peut pas valoir 0 : là où le dénominateur vaut 0, g n'est pas définie.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	5	$+\infty$	
Signe de $-x + 5$	+		+	0	-
Signe de $3x - 4$	+	0	-		-
Signe du quotient $g(x)$	+		-	0	+

g a pour valeur interdite $x = \frac{4}{3}$. Ainsi g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$ (cela signifie tous les réels sauf 0).

Exercice 34 : Dresser les tableaux de signe des fonctions suivantes :

- $f(x) = 5x + 3$
- $f(x) = -4x + 12$
- $f(x) = -3x - 21$
- $f(x) = 6x + 18$
- $f(x) = x^2 + 3$
- $f(x) = (8x + 4)(3 - 2x)$
- $f(x) = x^2(6x - 36)$
- $f(x) = \frac{-5x + 25}{34 + 17x}$
- $f(x) = x^3(11x + 121)$
- $f(x) = (x - 2)(2x + 1)(5 - x)$

Exercice 35 : Résoudre les inéquations suivantes :

- $-12x - 22 < 2$
- $x^2 - 7 > 137$
- $2x^3 + 4 \leq 0$
- $(-13x - 52)(-16x + 32) < 0$
- $\frac{5x + 8}{9 - 10x} \geq 0$
- $(x^2 - 16)(2x + 14) < 0$
- $(5x + 8)^2 - (7 - 10x)^2 \leq 0$
- $(60x + 12)\sqrt{x + 1} > 0$
- $\frac{(12x + 1)(7 - 2x)}{77x + 11} < 0$
- $-x^2 - 6x - 8 \geq 3x^2 - 18x + 1$

VI. Exercices d'approfondissement

Exercice 36 : On s'intéresse à la fonction $g(x) = \frac{3}{2}x - 4$.

- Résoudre algébriquement $g(x) = \frac{1}{3}$
- Donner les variations de la fonction g en justifiant votre réponse.
- Dresser le tableau de signe de g .
- Tracer $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé.

Exercice 37 : Après son achat, un article perd sa valeur petit à petit. On dit qu'il décote. Pour un modèle de photocopieur, la décote est de $t\%$ par an.

Si celui-ci est mal entretenu, il décote quatre fois plus vite, soit une décote de $4t\%$.

Une société achète un photocopieur neuf à 5 042€.

1. Pour tout $t > 0$, on note $V(t)$ la valeur du photocopieur, en fonction de sa décote, après une année d'utilisation avec un mauvais entretien.

Donner l'expression de V en fonction de t et en déduire sa nature.

2. Expliquer pourquoi l'ensemble de définition de V est $]0; 25]$
3. Déterminer les variations de V sur $]0; 25]$
4. Après cette année d'utilisation avec un mauvais entretien, la valeur du photocopieur est à présent de 548€.
Quelle décote a été subie par le photocopieur ? Arrondir au centième près.
5. Avec un bon entretien et la même décote, quelle aurait été la valeur du photocopieur au bout d'un an ?

Exercice 38 : Une nouvelle recrue en NBA fait le bilan de son adresse aux lancers francs après ses 250 premiers tirs.

Son club lui transmet les statistiques suivantes :

- 220 lancers francs ont été réussis ;
- 103 lancers francs réussis ont touché le cercle ;
- 130 lancers francs n'ont pas touché le cercle : cela concerne les lancers réussis, mais aussi les ratés.

R est l'évènement « le lancer franc a été réussi » et C l'évènement « le lancer franc a touché le cercle ».

Partie A

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Lancers francs réussis	Lancers francs non réussis	Total
Cercle touché			
Cercle non touché			
Total			

2. Calculer $P(\bar{R})$ et $P(\bar{R} \cap \bar{C})$ puis interpréter le résultat.
3. Traduire l'évènement $R \cup C$ par une phrase puis calculer $P(R \cup C)$.

Partie B

Le record NBA de réussite au lancer franc en carrière est de 98,1%. Le joueur veut battre ce record et pense qu'il va réussir tous les prochains lancers francs. Soit x le nombre de lancers francs à tenter.

1. Déterminer à quoi correspondent les expressions $250 + x$ et $220 + x$.
2. Résoudre l'inéquation : $\frac{220 + x}{250 + x} > \frac{98,1}{100}$
3. L'objectif semble-t-il réalisable ?

Exercice 39 : Soit h la fonction définie sur $x \in]-100; +\infty[$ par $h(x) = \frac{-100x}{x+100}$.

La fonction h permet d'obtenir le taux réciproque, c'est-à-dire que si un nombre évolue de $x\%$ alors une évolution successive de $h(x)\%$ permet de revenir à ce nombre initial.

1. (a) Calculer les images de -20 et 60 par h et interpréter.
(b) Justifier l'expression de h .
2. **Application :** Le cours du Bitcoin a connu une augmentation de plus de 400% entre les mois de janvier et de mars 2013.
 - (a) Quelle somme fallait-il avoir investi en janvier 2013 pour être en possession de $10\,000\text{€}$ en Bitcoin en mars 2013 ?
 - (b) Déterminer la fonction permettant d'obtenir la somme en Bitcoin en janvier 2013 en fonction de la somme en Bitcoin en mars 2013 ?